数学Ⅰ・数学A

（全　問　必　答）

第１問　（配点　20）

〔１〕　長方形 ABCD において，AB ＝ CD ＝ 8，BC ＝ DA ＝ 12 とする。辺 AB 上に点 P，辺 BC 上に点 Q，辺 CD 上に点 R を

AP ＝ BQ ＝ CR

となるようにとり，AP ＝ x とおく（$0 < x < 8$）。このとき，台形 PBCR の面積は $\boxed{アイ}$ である。また，△PQR の面積 S は

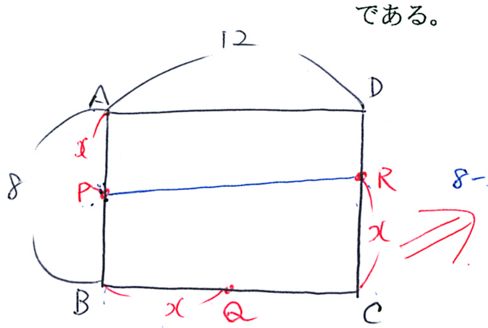
$S = x^2 - \boxed{ウエ}\,x + \boxed{オカ}$

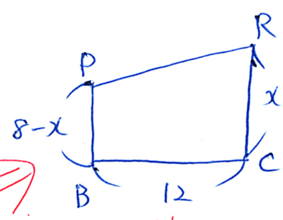
である。$S < 24$ となる x の範囲は

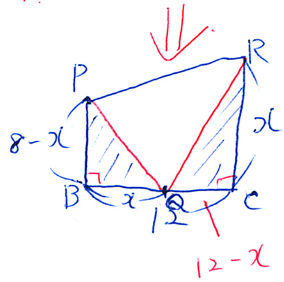
$\boxed{キ} < x < \boxed{ク}$

である。

（数学Ⅰ・数学A第１問は次ページに続く。）







台形PBCR

（上＋下）×高さ÷２

$\{(8-x)+x\}\times 12 \div 2 = 48$

△PQR ＝ 台形PBCR －（△PBQ －△RQC）

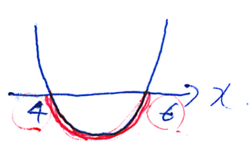
$△PBQ = x(8-x) \div 2 = \dfrac{x(8-x)}{2}$

$△RQC = (12-x) \times x \div 2 = \dfrac{(12-x)x}{2}$

$\therefore\ 48 - \dfrac{x(8-x)+(12-x)x}{2}$

$= 48 - \dfrac{-2x^2+20x}{2} = 48 + x^2 - 10x$

$\therefore\ S = x^2 - 10x + 48$



$x^2 - 10x + 48 < 24$ となるとき…

$x^2 - 10x + 24 < 0$

$(x-4)(x-6) < 0$

$\therefore\ 4 < x < 6$

〔2〕 次の $\boxed{\text{ケ}}$ ～ $\boxed{\text{シ}}$ に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

自然数 m，n について，条件 p，q，r を次のように定める。

p ： $m+n$ は 2 で割り切れる

q ： n は 4 で割り切れる

r ： m は 2 で割り切れ，かつ n は 4 で割り切れる

また，条件 p の否定を $\overline{p}$，条件 r の否定を $\overline{r}$ で表す。このとき

$\boxed{1}$ p は r であるための $\boxed{\text{ケ}}$ 。

$\boxed{2}$ $\overline{p}$ は $\overline{r}$ であるための $\boxed{\text{コ}}$ 。

$\boxed{3}$ 「p かつ q」は r であるための $\boxed{\text{サ}}$ 。

$\boxed{4}$ 「p または q」は r であるための $\boxed{\text{シ}}$ 。

⓪ 必要十分条件である

① 必要条件であるが，十分条件でない

② 十分条件であるが，必要条件でない

③ 必要条件でも十分条件でもない

[1]　$p \to r$ は偽（反例 $m=3$，$n=1$）

$r \to p$ について…

r:「m は 2 で割り切れる かつ n は 4 〃 」 $\Rightarrow$ 自然数 k，l を用いると $m=2k$，$n=4l$ と表せる

このとき，「p: $m+n$ は 2 で割り切れる」というのは

$$m+n = 2k+4l = 2(k+2l) \text{ となり}$$

$(k+2l)$ が自然数であるから，$m+n$ は 2 の倍数となる。

$\therefore$ $m+n$ は 2 で割り切れる

よって　$r \to p$ は真

つまり　$p \ \substack{\overset{\text{十分}}{\not\longrightarrow} \\ \underset{\text{必要}}{\longleftarrow}} \ r$　なので

p は r であるための必要条件であるが十分条件ではない。

①

---

[2]　$\overline{p} \to \overline{r}$ の対偶は $r \to p$

$\therefore$ $\overline{p} \to \overline{r}$ は真

$\overline{r} \to \overline{p}$ の対偶は $p \to r$

$\therefore$ $\overline{r} \to \overline{p}$ は偽

つまり，$\overline{p} \ \substack{\overset{\text{十分}}{\longrightarrow} \\ \underset{\text{必要}}{\not\longleftarrow}} \ \overline{r}$　なので

$\overline{p}$ は $\overline{r}$ であるための十分条件であるが必要条件ではない。

②

3 「p かつ q」は r であるための …… について

p：$m+n$ は2で割り切れ かつ q：n は4で割り切れる

のでで、自然数 k，l を用いて

p：$m+n=2k$　　q：$n=4l$　　と表せる。

このとき

$m=2k-n=2k-4l=2(k-2l)$ となる

$(k-2l)$ は自然数であるから m は2で割り切れる。

$\therefore$ 「p かつ q」$\longrightarrow r$ は真

$r \longrightarrow$「p かつ q」について…

r：m は2で割り切れ、かつ n は4で割り切れる

$2k$　　$4l$　　(k，l は自然数)

このとき

p かつ $q \longrightarrow n=4l$　$\therefore$ 4の倍数

$m+n=2k+4l=2(k+2l)$　$\therefore$ 2の倍数

$\therefore$ $r \longrightarrow$「p かつ q」は真

よって「p かつ q」$\underset{必要}{\overset{十分}{\rightleftarrows}}$ r なので

「p かつ q」は r であるための必要十分条件

⓪

4 「p または q」 $\longrightarrow r$ について…

反例：$m=3$　$n=1$

$r \longrightarrow$ 「p または q」について

1 より $r \longrightarrow p$ は 真　より　真

∴　「p または q」 $\underset{\text{必要}}{\overset{\text{十分}}{\rightleftarrows}} r$　より

「p または q」は r であるための 必要条件であるが十分条件ではない

①

第2問 (配点 25)

a, b を定数とし, $a \neq 0$ とする。2次関数

$$y = ax^2 - bx - a + b \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

のグラフが点$(-2,\ 6)$を通るとする。
x　y

このとき

$$b = -a + \boxed{\text{ア}}$$

平方完成!!

であり, グラフの頂点の座標を a を用いて表すと

$$\left(\frac{-a + \boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}\,a},\ \frac{-\left(\boxed{\text{エ}}\,a - \boxed{\text{オ}}\right)^2}{\boxed{\text{カ}}\,a} \right)$$

である。

(数学Ⅰ・数学A第2問は次ページに続く。)

$y = ax^2 - bx - a + b$ ─① が $(-2,6)$ を通るので代入

$6 = 4a + 2b - a + b$

$\therefore\ a + b = 2$ より $b = -a + 2$ ─②

①に②を代入すると

$y = ax^2 - (-a+2)x - a + (-a+2)$

$= ax^2 + (a-2)x - 2a + 2$

$= a\left\{x^2 + \frac{a-2}{a}x\right\} - 2a + 2$

$= a\left(x + \frac{a-2}{2a}\right)^2 - a \times \frac{(a-2)^2}{4a^2} - 2a + 2$

$= a\left(x + \frac{a-2}{2a}\right)^2 - \frac{(a-2)^2}{4a} - 2a + 2$

$= a\left(x + \frac{a-2}{2a}\right)^2 - \frac{9a^2 - 12a + 4}{4a}$

$= a\left(x + \frac{a-2}{2a}\right)^2 - \frac{(3a-2)^2}{4a}$ ─③

$x = -\frac{a-2}{2a}$ $\therefore$ $\left(\frac{-a+2}{2a},\ -\frac{(3a-2)^2}{4a}\right)$

$$\left(\frac{-a+2}{2a},\ -\frac{(3a-2)^2}{4a}\right)$$

さらに，2 次関数 ① のグラフの頂点の y 座標が -2 であるとする。 ④

このとき，a は

$$\boxed{キ}\,a^2-\boxed{クケ}\,a+\boxed{コ}=0$$

を満たす。これより，a の値は

$$a=\boxed{サ},\ \frac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$$

である。

$$-\frac{(3a-2)^2}{4a}=-2$$

$$(3a-2)^2=8a$$

$$\Leftrightarrow 9a^2-20a+4=0$$

$$\Leftrightarrow (9a-2)(a-2)=0$$

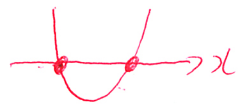
$$\therefore\ a=2,\ \frac{2}{9}$$

以下，$a=\dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$ $\left(\dfrac{2}{9}\right)$ であるとする。

このとき，2 次関数 ① のグラフの頂点の x 座標は $\boxed{セ}$ $\left(\dfrac{-a+2}{2a}\right)$ であり，

① のグラフと x 軸の 2 交点の x 座標は $\boxed{ソ}$，$\boxed{タ}$ である。

ただし，$\boxed{ソ}$ と $\boxed{タ}$ は解答の順序を問わない。



また，関数 ① は $0\leqq x\leqq 9$ において

$x=\boxed{チ}$ のとき，最小値 $\boxed{ツテ}$ をとり

$x=\boxed{ト}$ のとき，最大値 $\dfrac{\boxed{ナニ}}{\boxed{ヌ}}$ をとる。

$a=\frac{2}{9}$ のとき…　$x=\dfrac{-a+2}{2a}=\dfrac{-\frac{2}{9}+2}{2\times\frac{2}{9}}=\dfrac{\frac{16}{9}}{\frac{4}{9}}=4$　$\therefore 4$ —⑤

前ページ③

$$y=a\left(x+\frac{a-2}{2a}\right)^2-\frac{(3a-2)^2}{4a}$$ に ④，⑤ を代入すると

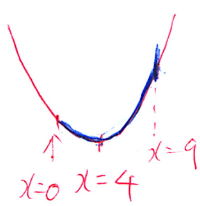
$$=\frac{2}{9}(x-4)^2-2$$ となる —⑥

このグラフと x 軸の 2 交点を知りたいので $\frac{2}{9}(x-4)^2-2=0$ を解くと

$x^2-8x+7=(x-1)(x-7)=0$ となり $x=1,\ 7$ となる

$0\leqq x\leqq 9$ において ⑥ より　$x=4$ のとき min -2

$x=9$ 〃 max $\frac{32}{9}$



数学Ⅰ・数学A

第3問 （配点　30）

△ABC において，AB = 7，BC = $4\sqrt{2}$，∠ABC = 45° とする。
また，△ABC の外接円の中心を O とする。

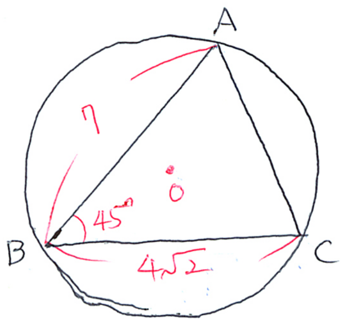
このとき，CA = $\boxed{\text{ア}}$ であり，外接円 O の半径は $\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ である。

外接円 O 上の点 A を含まない弧 BC 上に点 D を CD = $\sqrt{10}$ であるようにとる。∠ADC = $\boxed{\text{オカ}}$° であるから，AD = x とすると x は 2 次方程式

$$x^2 - \boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}\,x - \boxed{\text{ケコ}} = 0$$

を満たす。$x > 0$ であるから AD = $\boxed{\text{サ}}\sqrt{\boxed{\text{シ}}}$ となる。

（数学Ⅰ・数学A第3問は次ページに続く。）



余弦定理より

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC\cos 45°$ より

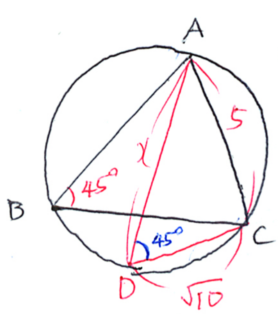
$x^2 = 49 + 32 - 2\cdot 7\cdot 4\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 25$

$x > 0$ より $x = 5$

正弦定理より

$\dfrac{AC}{\sin 45°} = \dfrac{5}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2R$ より $R = \dfrac{5}{2}\sqrt{2}$

図より∠ABC と∠ADC は円周角より∠ABC = ∠ADC = 45°



△ADC において余弦定理より

$x^2 + 10 - 2\sqrt{10}\,x\cdot\cos 45° = 25$

$x^2 - 2\sqrt{5}\,x - 15 = 0$

これを解くと $x = 3\sqrt{5}, -\sqrt{5}$

$x > 0$ より $x = 3\sqrt{5}$　∴ AD = $3\sqrt{5}$

下の $\boxed{\text{ス}}$ ， $\boxed{\text{セ}}$ ， $\boxed{\text{ツ}}$ には，次の⓪～⑤のうちから当てはまるものを一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪ AC　① AD　② AE　③ BA　④ CD　⑤ ED

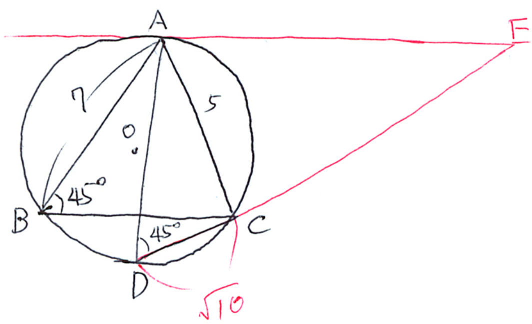
点Aにおける外接円Oの接線と辺DCの延長の交点をEとする。このとき，∠CAE＝∠ $\boxed{\text{ス}}$ Eであるから，△ACEと△D $\boxed{\text{セ}}$ は相似である。
これより

$$EA = \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}\sqrt{\boxed{\text{チ}}}\,EC$$

である。また，$EA^2 = \boxed{\text{ツ}} \cdot EC$ である。したがって

$$EA = \frac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}$$

であり，△ACEの面積は $\dfrac{\boxed{\text{ヌネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}$ である。



接弦定理より ∠CAE = ∠ABC なので
∠CAE = ∠ADE となり
△ACE と △DAE は相似となる

∴ AC : DA = CE : AE
$5 : 3\sqrt{5} = CE : AE$
$5AE = 3\sqrt{5}CE$　∴ $EA = \frac{3\sqrt{5}}{5}EC$

方べきの定理より
$EA^2 = ED \cdot EC$
$\frac{9}{5}EC^2 = ED \cdot EC \rightleftarrows ED = \frac{9}{5}EC$
$ED = \sqrt{10} + EC$ なので
$\sqrt{10} + EC = \frac{9}{5}EC$　∴ $EC = \frac{5\sqrt{10}}{4}$
よって，$EA = \frac{3\sqrt{5}}{5} \times \frac{5\sqrt{10}}{4} = \frac{15\sqrt{2}}{4}$

よって
$\triangle ACE = \frac{1}{2}AC \cdot AE \sin\angle EAC$
$= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{15\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$
$= \frac{75}{8}$

第4問 （配点 25）

（1回目, 2回目, 3回目）と表す

さいころを3回投げ，次の規則にしたがって文字の列を作る。ただし，何も書かれていないときや文字が1つだけのときも文字の列と呼ぶことにする。

1回目は次のようにする。

- 出た目の数が1， 2のときは，文字Aを書く
- 出た目の数が3， 4のときは，文字Bを書く
- 出た目の数が5， 6のときは，何も書かない

2回目， 3回目は次のようにする。

- 出た目の数が1， 2のときは，文字の列の右側に文字Aを1つ付け加える
- 出た目の数が3， 4のときは，文字の列の右側に文字Bを1つ付け加える
- 出た目の数が5， 6のときは，いちばん右側の文字を削除する。ただし，何も書かれていないときはそのままにする

以下の問いでは，さいころを3回投げ終わったときにできる文字の列について考える。

（A, A, A）つまり、3回とも「1, 2」が出ればよい
$2\times2\times2=\underline{8}$

(1) 文字の列がAAAとなるさいころの目の出方は $\boxed{\text{ア}}$ 通りである。

文字の列がABとなるさいころの目の出方は $\boxed{\text{イ}}$ 通りである。

（数学Ⅰ・数学A第4問は次ページに続く。）

（ , A, B）なので $2\times2\times2=\underline{8}$

$(\ ,\ ,A),(A,A,\ )(A,B,\ )$
$(A,\ ,A),(B,\ ,A)$
$\left(\frac{1}{3}\right)^3\times 5=\frac{5}{27}$

(2) 文字の列がAとなる確率は $\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エオ}}$ であり，何も書かれていない文字の列となる確率は $\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キク}}$ である。

$(\ ,\ ,\ ),(A,\ ,\ )$
$(B,\ ,\ ),(\ ,A,\ )$
$(\ ,B,\ )$ $\left(\frac{1}{3}\right)^3\times 5=\frac{5}{27}$

3回とも「5，6」が出ない
$\therefore \left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$

(3) 文字の列の字数が3となる確率は $\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コサ}}$ であり，字数が2となる確率は $\dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{スセ}}$ である。また，文字の列の字数の期待値は $\dfrac{\boxed{ソタ}}{\boxed{チ}}$ である。ただし，何も書かれていないときの字数は0とする。

1回目「5，6」
2，3回目「1～4」
$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{27}$

余事象の確率から

$1-\left(\underbrace{\frac{8}{27}}_{字数3}+\underbrace{\frac{4}{27}}_{2}+\underbrace{\frac{5}{27}}_{0}\right)=\underbrace{\frac{10}{27}}_{字数1}$

字数	0	1	2	3	
確率	$\frac{5}{27}$	$\frac{10}{27}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{8}{27}$	1

$0\times\frac{5}{27}+1\times\frac{10}{27}+2\times\frac{4}{27}+3\times\frac{8}{27}=\frac{1}{27}(10+8+24)$
$=\frac{14}{9}$