数学Ⅰ・数学A

（全　問　必　答）

第１問　（配点　20）

〔１〕　整式 $A = 6x^2 + 5xy + y^2 + 2x - y - 20$ を因数分解すると

$$A = \left(\boxed{\text{ア}}\,x + y + \boxed{\text{イ}}\right)\left(\boxed{\text{ウ}}\,x + y - \boxed{\text{エ}}\right)$$

となる。

$x = -1$，$y = \dfrac{2}{3-\sqrt{7}}$ のとき，A の値は $\boxed{\text{オカキ}}$ である。

（数学Ⅰ・数学A第１問は次ページに続く。）

まず…

$6x^2+5xy+y^2 = (2x+y)(3x+y)$ と分解可能.

$$\left(\begin{array}{cccc} 2x & & y & = 3xy \\ & \times & & \\ 3x & & y & = 2xy \\ \hline & & & 5xy \end{array}\right)$$

$(2x+y)(3x+y)+2x-y-20 \quad = \{(2x+y)+4\}\{(3x+y)-5\}$

$= (2x+y+4)(3x+y-5)$

$$\left(\begin{array}{cccc} (2x+y) & & 4 & = 12x+4y \\ & \times & & \\ (3x+y) & & -5 & = -10x-5y \\ \hline & & & 2x-y \end{array}\right)$$

$x=-1,\quad y=\dfrac{2}{3-\sqrt{7}}$ のとき

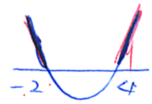
$= 3+\sqrt{7}$

$2x+y+4 = -2+3+\sqrt{7}+4 = \sqrt{7}+5$

$3x+y-5 = -3+3+\sqrt{7}-5 = \sqrt{7}-5$

$\therefore (\sqrt{7}+5)(\sqrt{7}-5) = 7-25 = \underline{-18}$

〔2〕 実数 a に関する条件 p，q，r を次のように定める。



$p：a^2 \geqq 2a+8$ → $a^2-2a-8 \geqq 0$

$q：a \leqq -2$ または $a \geqq 4$ 　 $\Longleftrightarrow (a-4)(a+2) \geqq 0$

$r：a \geqq 5$ 　 $\Longleftrightarrow a \leqq -2$ または $a \geqq 4$

(1) 次の $\boxed{\text{ク}}$ に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから一つ選べ。

q は p であるための $\boxed{\text{ク}}$ 。

$q \rightleftarrows p$

⓪ 必要十分条件である

① 必要条件であるが，十分条件でない

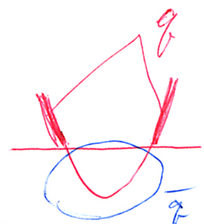
② 十分条件であるが，必要条件でない

③ 必要条件でも十分条件でもない

∴ q は p であるための
必要十分条件

⓪

(2) 条件 q の否定を $\overline{q}$，条件 r の否定を $\overline{r}$ で表す。



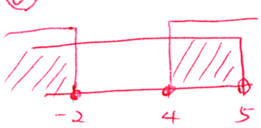
次の $\boxed{\text{ケ}}$ ，$\boxed{\text{コ}}$ に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

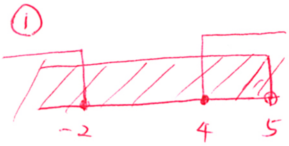
$p：a \leqq -2$ または $a \geqq 4$

命題「p ならば $\boxed{\text{ケ}}$ 」は真である。

命題「 $\boxed{\text{コ}}$ ならば p」は真である。

$q：a \leqq -2$ または $a \geqq 4$
$\overline{r}：a < 5$
$\overline{q}：-2 < a < 4$

⓪


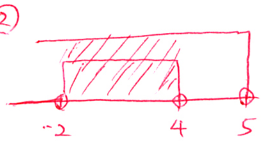
①


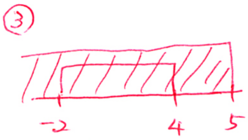
⓪ q かつ $\overline{r}$ → $a \leqq -2$ または $4 \leqq a < 5$

① q または $\overline{r}$ → a は実数全体

② $\overline{q}$ かつ $\overline{r}$ → $-2 < a < 4$

③ $\overline{q}$ または $\overline{r}$ → $a < 5$

②


③


∴ p ならば「q または $\overline{r}$」は真
「q かつ $\overline{r}$」ならば p は真

数学Ⅰ・数学A

第2問 （配点　25）

a を定数とし，x の 2 次関数

$$y = 2x^2 - 4(a+1)x + 10a + 1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

のグラフを G とする。

平方完成！

グラフ G の頂点の座標を a を用いて表すと

$$\left(a + \boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イウ}}\,a^2 + \boxed{\text{エ}}\,a - \boxed{\text{オ}}\right)$$

である。

(1)　グラフ G が x 軸と接するのは

$$a = \frac{\boxed{\text{カ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

のときである。

（数学Ⅰ・数学A第2問は次ページに続く。）

$$y = 2x^2 - 4(a+1)x + 10a + 1$$
$$= 2\{x-(a+1)\}^2 - 2(a+1)^2 + 10a + 1$$
$$= 2\{x-(a+1)\}^2 - 2a^2 + 6a - 1 \qquad \therefore \left(a+1,\ -2a^2+6a-1\right)$$

(1)　グラフGが x 軸と接するのは、頂点の y 座標が0のとき

$$\therefore\ -2a^2+6a-1=0 \qquad \therefore\ a = \frac{3\pm\sqrt{7}}{2}$$

頂点 $(a+1,\ -2a^2+6a-1)$

(2)　関数①の $-1 \leqq x \leqq 3$ における最小値を m とする。

$$m = \boxed{イウ}\,a^2 + \boxed{エ}\,a - \boxed{オ}$$

-2　　6　　1

となるのは

$$\boxed{ケコ} \leqq a \leqq \boxed{サ}$$

-2　　$2.$

のときである。また

$a < \boxed{ケコ}$ のとき　$m = \boxed{シス}\,a + \boxed{セ}$

-2

$\boxed{サ} < a$ のとき　$m = \boxed{ソタ}\,a + \boxed{チ}$

2

である。

したがって，$m = \dfrac{7}{9}$ となるのは

$$a = \frac{\boxed{ツ}}{\boxed{テ}},\ \frac{\boxed{トナ}}{\boxed{ニ}}$$

のときである。

(i) $a+1$ が $-1 \leqq x \leqq 3$ の範囲にあるならば $m = -2a^2+6a-1$ となる.

$\therefore\ -1 \leqq a+1 \leqq 3 \implies \underline{-2 \leqq a \leqq 2}$

(ii) $\underline{a < -2}$ のとき

左のグラフより $x = -1$ のとき最小値 m をとる.

①に代入して

$\therefore\ m = 2(-1)^2 - 4(a+1)\times(-1) + 10a + 1$

$= \underline{14a+7}$

$a+1 < -1$

$a < -2$

(iii) $\underline{2 < a}$ のとき

左のグラフより $x = 3$ のとき最小値 m をとる.

①に代入して

$m = 2\cdot 3^2 - 4(a+1)\cdot 3 + 10a + 1 = \underline{-2a+7}$

$3 < a+1$

$2 < a$

まとめると (i) $-2 \leqq a \leqq 2$ のとき　$m = -2a^2+6a-1$

(ii) $a < -2$ のとき　$m = 14a+7$

(iii) $2 < a$ のとき　$m = -2a+7$

第3問 （配点　30）

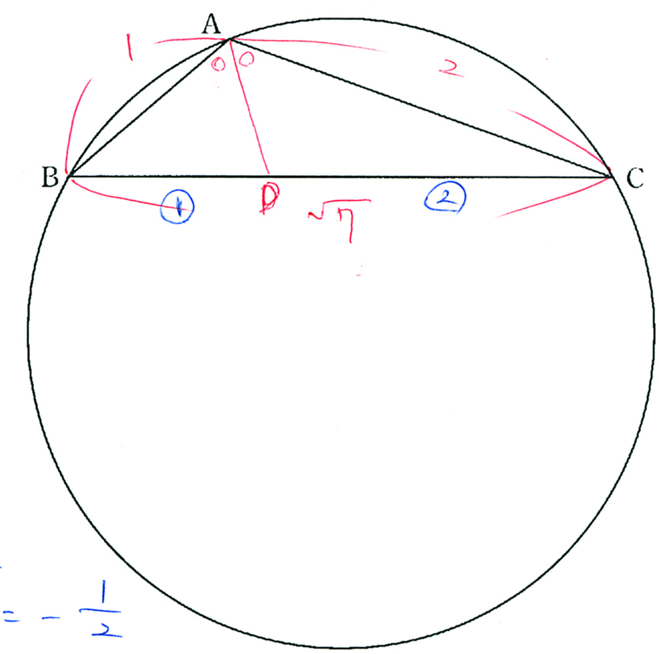
$\triangle ABC$ において，$AB = 1$，$BC = \sqrt{7}$，$AC = 2$ とし，$\angle CAB$ の二等分線と辺 BC との交点を D とする。

このとき，$\angle CAB = \boxed{\text{アイウ}}^\circ$ であり

$$BD = \frac{\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}}, \qquad CD = \frac{\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

である。

参考図



余弦定理より

$\cos\angle CAB = \dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\cdot AB\cdot AC} = -\dfrac{1}{2}$

∴ $\angle CAB = 120^\circ$

ADは∠CABを2等分するので、角の二等分線の定理より

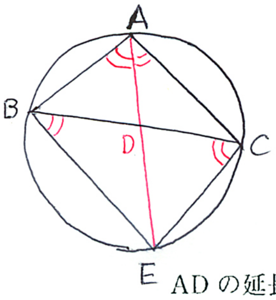
$BD : CD = AB : AC = 1 : 2$

∴ DはBCを1:2に内分する

つまり $BD = \dfrac{1}{3}BC = \dfrac{1}{3}\times\sqrt{7} = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$

$CD = \dfrac{2}{3}BC = \dfrac{2}{3}\times\sqrt{7} = \dfrac{2\sqrt{7}}{3}$

（数学Ⅰ・数学A第3問は次ページに続く。）



$\angle CAB = 120°$より $\angle BAE = \angle CAE = \frac{1}{2}\angle CAB = 60°$
円周角の定理より $\angle BAE = \angle BCE = 60°$
$\angle CBE = \angle CAE = 60°$

△BCEにおいて $\angle BEC = 180° - (\angle CBE + \angle BCE) = 60°$

ADの延長と△ABCの外接円Oとの交点のうちAと異なる方をEとする。このとき，∠DABと等しい角は，次の⓪～④のうち $\boxed{ケ}$ と $\boxed{コ}$ である。ただし，$\boxed{ケ}$ と $\boxed{コ}$ の解答の順序は問わない。

左上の図より
∠DBE，∠BEC
⓪ ④

⓪ ∠DBE　　① ∠ABD　　② ∠DEC　　③ ∠CDE　　④ ∠BEC

これより，$BE = \sqrt{\boxed{サ}}$ である。また，$DE = \dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$ である。

次に，△BEDの外接円の中心をO′とすると

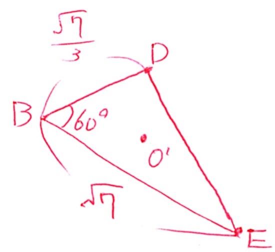
正弦定理！

$$O'B = \frac{\boxed{セ}\sqrt{\boxed{ソ}}}{\boxed{タ}}$$

であり

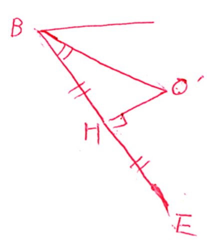
$$\tan\angle EBO' = \frac{\sqrt{\boxed{チ}}}{\boxed{ツ}}$$

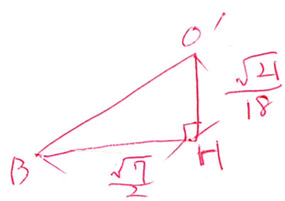
である。



したがって、△BCEは正三角形
$BE = BC = CE = \sqrt{7}$
△BDEにおいて余弦定理より
$DE^2 = BD^2 + BE^2 - 2BD\cdot BE\cos\angle DBE$
$= \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2 + \sqrt{7}^2 - 2\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}\cdot\sqrt{7}\cos 60° = \frac{49}{9}$　　$\therefore DE = \frac{7}{3}$

次に、△BEDの外接円の中心をO′とすると
正弦定理より





$$\frac{DE}{\sin 60°} = 2R = 2O'B$$

$$\therefore O'B = \frac{DE}{2\sin 60°} = \frac{\left(\frac{7}{3}\right)}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{9}$$

O′から辺BEへ垂線O′Hをひくと、Hは辺BEを二等分する。
△O′BHにおいて三平方の定理より $O'H^2 = O'B^2 - BH^2 = \left(\frac{7\sqrt{3}}{9}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2$

$O'H = \frac{\sqrt{21}}{18}$

$$\therefore \tan\angle EBO' = \frac{O'H}{BH} = \frac{\left(\frac{\sqrt{21}}{18}\right)}{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

(i) のとき　$-2a^2+6a-1=\frac{7}{9}$ を解くと　$a=\frac{1}{3},\ \frac{8}{3}$

$-2\leqq a\leqq 2$ より　$a=\frac{1}{3}$

(ii) のとき　$14a+7=\frac{7}{9}$ を解くと　$a=-\frac{4}{9}$

$a<-2$ なので　不適

(iii) のとき　$-2a+7=\frac{7}{9}$ を解くと　$a=\frac{28}{9}$

$2<a$ より　OK

$\therefore\ a=\frac{1}{3},\ \frac{28}{9}$

第４問　(配点　25)

さいころを繰り返し投げ，出た目の数を加えていく。その合計が４以上になったところで投げることを終了する。

(1)　１の目が出たところで終了する目の出方は $\boxed{\text{ア}}$ 通りである。

２の目が出たところで終了する目の出方は $\boxed{\text{イ}}$ 通りである。

３の目が出たところで終了する目の出方は $\boxed{\text{ウ}}$ 通りである。

４の目が出たところで終了する目の出方は $\boxed{\text{エ}}$ 通りである。

(数学Ⅰ・数学A第４問は次ページに続く。)

(1) 最後に1の目であるためには… それまでに出た目の数の合計は3

$1 \to 1 \to 1$
$1 \to 2$
$2 \to 1$
3

4通り

最後に2の目であるためには… それまでに出た目の数の合計は 2 or 3

合計2
$1 \to 1$
2

2通り

∴ 4 + 2 = 6通り

3の目の場合 … それまでに出た目の数の合計は 1 or 2 or 3

3 − 3 ∴ 1 + 6 = 7　7通り

4の目の場合 … 1回目で4の場合がある. 他に 1 or 2 or 3

1 + 7 = 8　8通り

4.

(2) 投げる回数が1回で終了する確率は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ であり，2回で終了する確率は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$ である。終了するまでに投げる回数が最も多いのは $\boxed{\text{コ}}$ 回であり，投げる回数が $\boxed{\text{コ}}$ 回で終了する確率は $\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シスセ}}}$ である。終了するまでに投げる回数の期待値は $\dfrac{\boxed{\text{ソタチ}}}{\boxed{\text{ツテト}}}$ である。

(2) 1回で終了するのは 4, 5, 6 のどれかが出た場合

$\therefore \dfrac{1}{6} \times 3 = \dfrac{1}{2}$

2回で終了するのは，

1回目	2回目		
1	3〜6のどれか	$\frac{1}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{1}{9}$	
2	2〜6 〃	$\frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$	$\frac{5}{12}$
3	1〜6 〃	$\frac{1}{6} \times \frac{6}{6} = \frac{1}{6}$	

投げる回数が最も多いのは 4回

1, 1, 1, 1〜6 のときなので $\dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{6} \times \dfrac{6}{6} = \dfrac{1}{216}$

投げる回数と確率を表にしてみると…

投げる回数	1	2	3	4
確率	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{17}{216}$	$\frac{1}{216}$

余事象！

$1 - \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{12} + \dfrac{1}{216} \right) = \dfrac{17}{216}$

∴ 期待値は

$1 \cdot \dfrac{1}{2} + 2 \cdot \dfrac{5}{12} + 3 \cdot \dfrac{17}{216} + 4 \cdot \dfrac{1}{216} = \dfrac{343}{216}$