数学Ⅰ・数学A

（全　問　必　答）

第１問　（配点　20）

〔1〕 $\alpha = \dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ とする。α の分母を有理化すると

$$\alpha = \frac{\boxed{\text{ア}} - \sqrt{\boxed{\text{イウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

$$\frac{(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{(\sqrt{7}+\sqrt{3})} \times \frac{(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})} = \frac{(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2}{7-3} = \frac{10-2\sqrt{21}}{4}$$

$$= \frac{5-\sqrt{21}}{2}$$

となる。

2 次方程式 $6x^2 - 7x + 1 = 0$ の解は

$$x = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}},\quad \boxed{\text{キ}}$$

$$6x^2 - 7x + 1 = (6x-1)(x-1) = 0$$

$$x = \frac{1}{6},\ 1$$

である。

次の⓪～③の数のうち最も小さいものは $\boxed{\text{ク}}$ である。

⓪ $\dfrac{\boxed{\text{ア}} - \sqrt{\boxed{\text{イウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$　$\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}$

① $\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{ア}} - \sqrt{\boxed{\text{イウ}}}}$　$\dfrac{2}{5-\sqrt{21}} = \dfrac{5+\sqrt{21}}{2}$

② $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$　$\dfrac{1}{6}$

③ $\boxed{\text{キ}}$　1

（数学Ⅰ・数学A 第１問は次ページに続く。）

⓪ < ①

$$\frac{5-\sqrt{21}}{2} < \frac{5+\sqrt{21}}{2}$$

② < ③

$$\frac{1}{6} < 1$$

つまり ⓪か②のどちらかが最小

$$\frac{5-\sqrt{21}}{2} - \frac{1}{6} = \frac{15-3\sqrt{21}-1}{6} = \frac{14-3\sqrt{21}}{6} = \frac{\sqrt{196}-\sqrt{189}}{6} > 0$$

よって ② < ⓪

つまり、最も小さいのは ②

〔2〕 次の $\boxed{ケ}$ ～ $\boxed{サ}$ に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。また，$\boxed{シ}$ に当てはまるものを，下の④～⑦のうちから一つ選べ。

自然数 n に関する条件 p，q，r，s を次のように定める。

p：n は 5 で割ると 1 余る数である → $n = 5m+1$ （m は 0 以上の整数）

q：n は 10 で割ると 1 余る数である → $n = 10m'+1$ （m' は 0 以上の整数）

r：n は奇数である

s：n は 2 より大きい素数である

また，条件 r の否定を $\overline{r}$，条件 s の否定を $\overline{s}$ で表す。このとき

「p かつ r」は q であるための $\boxed{ケ}$。

$\overline{r}$ は $\overline{s}$ であるための $\boxed{コ}$。

「p かつ s」は「q かつ s」であるための $\boxed{サ}$。

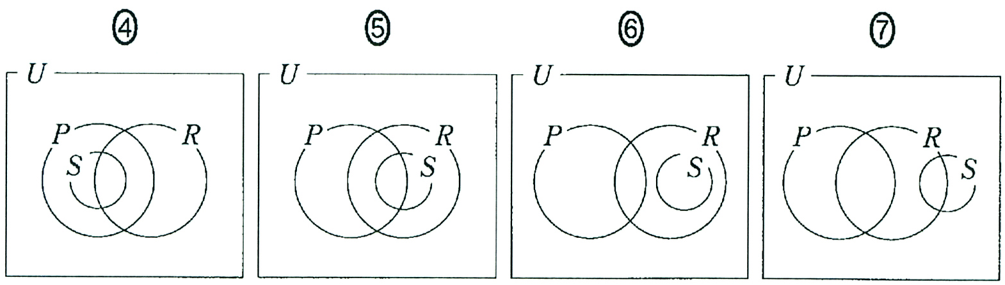
⓪ 必要十分条件である

① 必要条件であるが，十分条件でない

② 十分条件であるが，必要条件でない

③ 必要条件でも十分条件でもない

自然数全体の集合を全体集合 U とし，条件 p を満たす自然数全体の集合を P，条件 r を満たす自然数全体の集合を R，条件 s を満たす自然数全体の集合を S とすると，P，R，S の関係を表す図は $\boxed{シ}$ である。



条件pを満たす自然数nは、0以上の整数mを用いて表すと

$n=5m+1$ 　となる —①

この自然数nがさらに条件r「nは奇数である」を満たすとき、

5mは偶数，すなわちmは偶数となるので mは0以上の整数m'を用いると

$m=2m'$ と表せる。—②

つまり「pかつr」を満たす自然数nは

$n=5\cdot 2m'+1=10m'+1$ と表せる。

これは条件q「nは10で割ると1余る数である」を満たすので「pかつr」⇒qは真

また、条件qを満たす自然数nは0以上の整数m'を用いて

$n=10m'+1$ と表せる　つまり、「pかつq」を満たす！ q⇒「pかつr」は真

よって、「pかつr」⇄q

「pかつr」はqであるための必要十分条件

⓪

ここで、条件$\bar{r}$を満たす自然数nは偶数，条件$\bar{s}$を満たす自然数nは1 or 2

または 2より大きい素数でない数である

∴ $\bar{r}\Rightarrow\bar{s}$は真　$\bar{s}\Rightarrow\bar{r}$は偽

$\bar{r}$ ⇄(×) $\bar{s}$

$\bar{r}$は$\bar{s}$であるための十分条件であるが必要条件ではない

②

条件sを満たす自然数nは3以上の素数で奇数.

条件「pかつs」を満たす自然数は①、②より $n=10m'+1$ （m'は1以上の整数）

nは素数　と表せる.

つまり、この自然数nは条件「qかつs」を満たす　「pかつs」⇒「qかつs」は真

また、条件「qかつs」を満たす自然数は1以上の整数m'を用いて

$n=10m'+1=5\cdot 2m'+1$，nは素数　と表せる.

条件「pかつs」を満たし、「qかつs」⇒「pかつs」は真

∴「pかつs」⇄「qかつs」なので「pかつs」は「qかつs」であるための必要十分条件である

⓪

条件pを満たす自然数nは①より $n=5m+1$ と表せる

mが奇数のとき、nは偶数、mが偶数のときnは奇数.

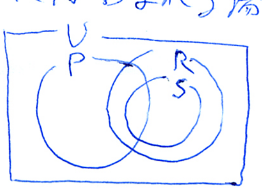
したがって、P, Rの関係は

と表せる。

次に条件sを満たす自然数nは3以上の素数で奇数 ⇒ Rに含まれる

しかし、Pには含まれる場合とそうでない場合がある。（n=11のときn∈P，n=3 〃 n∉P）

以上より



P, R, Sの関係は左図のようになり ⑤となる.

第2問 (配点 25)

a, b を実数とし, x の二つの2次関数

G_1 $y = 3x^2 - 2x - 1$ ………… ①

G_2 $y = x^2 + 2ax + b$ ………… ②

のグラフをそれぞれ G_1, G_2 とする。

以下では, G_2 の頂点は G_1 上にあるとする。 平方完成!!

このとき

$$b = \boxed{\text{ア}}\,a^2 + \boxed{\text{イ}}\,a - \boxed{\text{ウ}}$$

であり, G_2 の頂点の座標を a を用いて表すと

$$\left(-a,\ \boxed{\text{エ}}\,a^2 + 2a - \boxed{\text{オ}}\right)$$

となる。

(数学Ⅰ・数学A第2問は次ページに続く。)

G_2の頂点、 $y = x^2 + 2ax + b$

$= (x+a)^2 + b - a^2$ より $(-a,\ b-a^2)$ — ③

これが G_1 上にあるので ①に代入

$y = 3x^2 - 2x - 1$

$b - a^2 = 3(-a)^2 - 2(-a) - 1$ $\therefore$ $\underline{b = 4a^2 + 2a - 1}$

これを ③に代入すると

G_2頂点 $= (-a,\ 4a^2 + 2a - 1 - a^2) = (-a,\ \underline{3a^2 + 2a - 1})$ — ④

$3a^2+2a-1 = 3(a^2+\frac{2}{3}a)-1$

$= 3(a+\frac{1}{3})^2-\frac{4}{3}$　∴ $a=-\frac{1}{3}$ のとき min $-\frac{4}{3}$

(1)　G_2 の頂点の y 座標は，$a=\dfrac{\boxed{カキ}}{\boxed{ク}}$ のとき，最小値 $\dfrac{\boxed{ケコ}}{\boxed{サ}}$ をとる。

-1

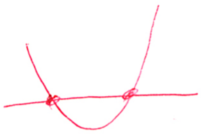
$a=\dfrac{\boxed{カキ}}{\boxed{ク}}$ のとき，G_2 の軸は直線 $x=\dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$ であり，G_2 と x 軸との

3

交点の x 座標は

$$\frac{\boxed{セ}\pm\boxed{ソ}\sqrt{\boxed{タ}}}{\boxed{チ}}$$

である。



軸$(x)=-a$ より $-(-\frac{1}{3})=\frac{1}{3}$

$a=-\frac{1}{3}$ を ④に代入すると

G_2の頂点は $(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3})$ となる

つまり、$y=(x-\frac{1}{3})^2-\frac{4}{3}$ より

$=x^2-\frac{2}{3}x-\frac{11}{9}$

G_2 と x軸との交点は

$x^2-\frac{2}{3}x-\frac{11}{9}=0$ より

$x=\frac{1\pm2\sqrt{3}}{3}$

(2)　G_2 が点$(0,5)$を通るとき，$a=\boxed{ツ}$，$\dfrac{\boxed{テト}}{\boxed{ナ}}$ である。

$a=\boxed{ツ}$ のとき，G_2 を x 軸方向に $\boxed{ニ}$，y 軸方向にも同じく $\boxed{ニ}$ だけ平行移動しても頂点は G_1 上にある。ただし，$\boxed{ニ}$ は0でない数とする。

$y=x^2+2ax+b$

$5=b$　∴ $y=x^2+2ax+5$

これを $b=4a^2+2a-1$ に代入すると

$4a^2+2a-1=5$

$4a^2+2a-6$

$=2(2a^2+a-3)$

$=2(2a+3)(x-1)=0$

$a=-\frac{3}{2}, 1$

$a=1$ のとき，頂点 $G_2=(-1, 4)$

これを x軸に p，y軸に pだけ平行移動すると頂点は$(-1+p, 4+p)$となる。これが G_1上にあるので，①の $y=3x^2-2x-1$ に代入。

$4+p=3(-1+p)^2-2(-1+p)-1$

$\Leftrightarrow$ $3p^2-9p=0$

$3p(p-3)=0$ より $p=0, 3$

問題文より $p\neq0$ より，$p=3$

∴ G_2を x軸方向に3，y軸方向にも同じく3だけ平行移動しても頂点は G_1上にある。

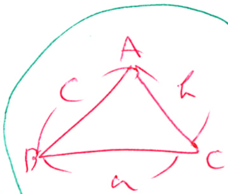
数学Ⅰ・数学A

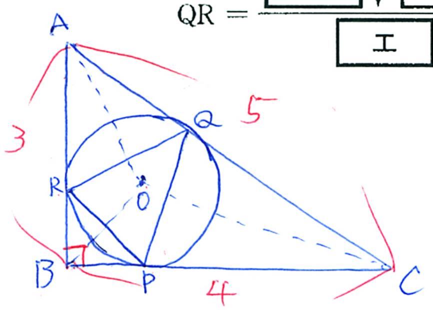
第3問 (配点 30)

△ABCをAB＝3，BC＝4，CA＝5である直角三角形とする。

(1) △ABCの内接円の中心をOとし，円Oが3辺BC，CA，ABと接する点をそれぞれP，Q，Rとする。このとき，OP＝OR＝$\boxed{\text{ア}}$である。また，

QR $= \dfrac{\boxed{\text{イ}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$ であり，sin∠QPR $= \dfrac{\boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である。





(数学Ⅰ・数学A第3問は次ページに続く。)

$S=\frac{1}{2}(a+b+c)r$

△ABCの内接円の半径をrとすると

ヘロンの公式

△ABCの面積は

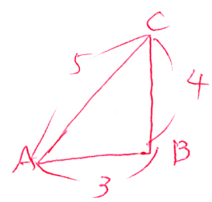
△ABC＝△OAB＋△OBC＋△OCA なので

$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4 = \frac{1}{2}(3+4+5)r$　∴ $r=1$

∴ $r=OP=OR=1$

また、△AQRにおいて、余弦定理を用いると

$\cos\angle QAR = \cos\angle CAB = \frac{3}{5}$

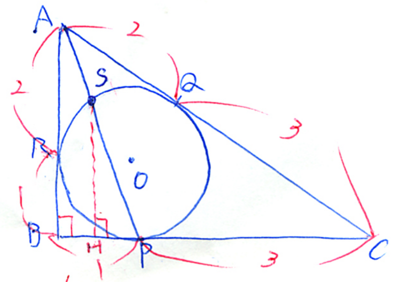


∴ $QR^2 = AQ^2 + AR^2 - 2AQ\cdot AR\cos\angle QAR$

$= 2^2+2^2-2\cdot 2\cdot 2\cdot \frac{3}{5} = \frac{16}{5}$　∴ $QR = \frac{4\sqrt{5}}{5}$

△PQRに正弦定理を用いると

$\frac{QR}{\sin\angle QPR} = 2OP = 2$ より $\sin\angle QPR = \frac{1}{2}QR = \frac{2\sqrt{5}}{5}$



△ABPに三平方の定理を用いると

$AP^2 = AB^2 + BP^2 = 3^2 + 1^2 = 10$ ∴ $AP = \sqrt{10}$

また方べきの定理より $AS \cdot AP = AR^2$

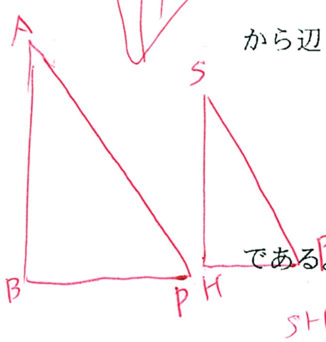
$AS \cdot \sqrt{10} = 2^2$ $AS = \frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$

∴ $SP = AP - AS = \sqrt{10} - \frac{2\sqrt{10}}{5} = \frac{3\sqrt{10}}{5}$

(2) 円 O と線分 AP との交点のうち P と異なる方を S とする。このとき，

$AP = \sqrt{\boxed{\text{クケ}}}$ であり，$SP = \dfrac{\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サシ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である。また，点 S から辺 BC へ垂線を下ろし，垂線と BC との交点を H とする。このとき

$HP:BP = SP:AP$



$$HP = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}, \quad SH = \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$$

である。したがって，$\tan\angle BCS = \dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ である。

$SH:AB = HP:BP$

ここで SH // AB より

$HP = \frac{BP \cdot SP}{AP} = \frac{1 \cdot \frac{3\sqrt{10}}{5}}{\sqrt{10}} = \frac{3}{5}$

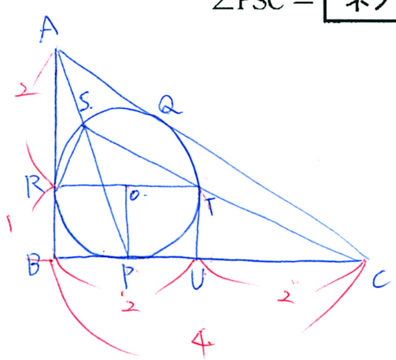
$SH = \frac{AB \cdot HP}{BP} = \frac{3 \cdot \frac{3}{5}}{1} = \frac{9}{5}$

∴ $\tan\angle BCS = \frac{SH}{CH} = \frac{SH}{CP + HP} = \frac{1}{2}$ ─①

(3) 円 O 上に点 T を線分 RT が円 O の直径となるようにとる。このとき，

$\tan\angle BCT = \dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ である。よって，$\angle RSC = \boxed{\text{ニヌ}}°$ であり，

$\angle PSC = \boxed{\text{ネノ}}°$ である。



点 T が辺 BC に垂線 TU を下ろすと

$RT = BU = 2$ であるから

$CU = 4 - 2 = 2$

また，$TU = OP = 1$ より

$\tan\angle BCT = \tan\angle UCT = \frac{TU}{CU} = \frac{1}{2}$ ─②

①，② より

$\angle BCS = \angle BCT$

∴ 3点 S，T，C は同一直線上にある

よって $\angle RSC = \angle RST = 90°$

（半円弧 RT に対する円周角）

また，△PTR は直角二等辺三角形

$\angle PSC = \angle PST = \angle PRT = 45°$

（$\overset{\frown}{PT}$ に対する円周角）

数学Ⅰ・数学A

第４問 （配点　25）

袋の中に赤玉５個，白玉５個，黒玉１個の合計 11 個の玉が入っている。赤玉と白玉にはそれぞれ１から５までの数字が一つずつ書かれており，黒玉には何も書かれていない。なお，同じ色の玉には同じ数字は書かれていない。この袋から同時に５個の玉を取り出す。

異なる 11コ より 5コ をとり出す

５個の玉の取り出し方は $\boxed{\text{アイウ}}$ 通りある。

$_{11}C_5 = 462$

取り出した５個の中に同じ数字の赤玉と白玉の組が２組あれば得点は２点，１組だけあれば得点は１点，１組もなければ得点は０点とする。

（数学Ⅰ・数学A第４問は次ページに続く。）

(2) 得点が1となる取り出し方は ③、④より $120+160=280$ 通り

$$\therefore \frac{280}{462}=\frac{20}{33}$$

また、得点は 0, 1, 2 点のどれか.

$80+32+120+160=392$ 通り

∴ 得点2点となるのは $462-392=70$ 通り

$$\therefore \frac{70}{462}=\frac{5}{33}$$

表にしてみると

点	0	1	2
確率	$\frac{8}{33}$	$\frac{20}{33}$	$\frac{5}{33}$

$$\therefore 0\times\frac{8}{33}+1\times\frac{20}{33}+2\times\frac{5}{33}=\frac{10}{11}$$

(1) 得点が0点となる取り出し方のうち，黒玉が含まれているのは $\boxed{\text{エオ}}$ 通りであり，黒玉が含まれていないのは $\boxed{\text{カキ}}$ 通りである。

得点が1点となる取り出し方のうち，黒玉が含まれているのは $\boxed{\text{クケコ}}$ 通りであり，黒玉が含まれていないのは $\boxed{\text{サシス}}$ 通りである。

(2) 得点が1点である確率は $\dfrac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タチ}}}$ であり，2点である確率は $\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テト}}}$ である。

また，得点の期待値は $\dfrac{\boxed{\text{ナニ}}}{\boxed{\text{ヌネ}}}$ である。

(1) 得点が0 … 黒玉含は黒玉以外の赤玉5コ，白玉5コより4コ選ぶ
かつ
4コの番号が全て異なる.
赤白の選び方 × 番号の選び方
$2^4 \times {}_5C_4 = 80$ 80通り —①
黒玉を含まないのは赤玉5コ，白玉5コより5コ選ぶ
かつ
5コの番号が全て異なる
∴ $2^5 \times {}_5C_5 = 32$ 32通り —②

得点が1 … 黒玉含は黒玉以外の赤玉5コ，白玉5コより4コ選ぶ
かつ
このうち2コ1組が同じ番号，残り2コの番号は異なる番号
同じ番号の並び方 × 残り2コの並び方 × 赤と白の選び方
$_5C_1 \times {}_4C_2 \times 2^2 = 120$通り ③
黒玉含まない…赤5コ，白5コから5コを選ぶ
かつ
このうち2コ1組が同じ番号，残り3コの番号は異なる番号
同じ番号の並び方 × 残り3つの並び方
$_5C_1 \times {}_4C_3 \times 2^3 = 160$通り ④